

Übung zur Vorlesung Automaten, Formale Sprachen und Berechenbarkeit

Aufgabe 1 *Muller-Automaten*

Ein Muller-Automat ist eine Variante eines Büchi-Automaten mit einer veränderten Akzeptanzbedingung. Formal ist ein Muller-Automat ein 5-Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, wobei Q, Σ, δ, q_0 wie bei Büchi-Automaten definiert sind und $F \subseteq 2^Q$ gilt. Die von A akzeptierte Sprache ist wie folgt definiert:

$$L^\omega(A) = \{ w \in \Sigma^\omega \mid \text{es gibt eine Berechnung } \pi \text{ von } A \text{ auf } w \text{ so, dass } \inf(\pi_w) \in F \},$$

wobei $\inf(\pi_w)$ die Menge der Zustände ist, die bei der Berechnung π unendlich oft durchlaufen werden.

- (i) Zeigen Sie, dass man zu jedem Büchi-Automaten A einen Muller-Automaten B konstruieren kann, so dass $L^\omega(A) = L^\omega(B)$ gilt, d.h. beide Automaten erkennen dieselbe Sprache.
- (ii) Zeigen Sie, dass die *deterministischen* Muller-Automaten unter Komplementbildung abgeschlossen sind.
- (iii) Zeigen Sie, dass die *deterministischen* Muller-Automaten unter Schnittbildung abgeschlossen sind.
- (iv) Beweisen Sie, dass *nicht* jeder *deterministische* Muller-Automat in einen *deterministischen* Büchi-Automaten umgewandelt werden kann.

Hinweis: Sie können folgenden Satz verwenden: Für einen deterministischen Büchi-Automaten A gilt

$$L^\omega(A) = \{ w \in \Sigma^\omega \mid \text{unendlich viele Präfixe von } w \text{ sind in } L(A) \},$$

wobei $L(A)$ die Sprache von A ist, wenn man A als endlichen Automaten betrachtet.

Aufgabe 2 *Deterministische Muller-Automaten*

Wir definieren vollständige Muller-Automaten. Es sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein Muller-Automat. Eine Menge $R \subseteq Q$ heißt ω -*erreichbar* falls es eine Berechnung π von A auf einem Wort w gibt mit $\inf(\pi) = R$. Der Muller-Automat A ist *vollständig* genau dann, wenn für ω -erreichbare $R, S \subseteq Q$ gilt: $R \in F$ und $R \subseteq S$ impliziert $S \in F$.

- (a) Geben Sie einen *deterministischen* Muller-Automaten an der vollständig ist und die Sprache

$$L = \{ w \in \{a, b\}^\omega \mid w \text{ enthält unendlich oft den Buchstaben } b \}$$

akzeptiert.

- (b) Zeigen Sie, dass man zu jedem deterministischen Büchi-Automaten A einen vollständigen *deterministischen* Muller-Automaten B konstruieren kann, so daß $L^\omega(A) = L^\omega(B)$ gilt, d.h., beide Automaten erkennen dieselbe Sprache.
- (c) Zeigen Sie folgende Aussage: Wenn eine Sprache von einem *deterministischen* Muller-Automaten A akzeptiert wird und es einen deterministischen Büchi-Automaten B gibt mit $L^\omega(A) = L^\omega(B)$, dann ist der Automat A vollständig.

Aufgabe 3 *Weihnachtsaufgabe*

Der Weihnachtsmann hat dieses Jahr Probleme. Eigentlich weiß er sonst genau, welches Geschenk in welchem Paket er welchem Kind bringen soll. Doch jetzt hat dummerweise Engelchen Krauskopf die Geschenke eingepackt und auch den Auslieferungsauftrag entgegengenommen. Und Engelchen Krauskopf vergißt immer das meiste. Es hat die fünf Geschenke sorgfältig in verschiedenfarbiges Papier eingepackt, in einer Reihe vor den Schlitten des Weihnachtsmanns gestellt und ist abgehauen. An jedem Paket hängt noch eine Leckerei. Der Weihnachtsmann macht Engelchen Krauskopf ausfindig und fragt es aus. Leider erfährt er nur folgendes:

- Ernst bekommt das rote Paket.
- Stefan bekommt den Bildatlas.
- Das grüne Paket bekommt das Kind mit dem Tannenbäumchen im Fenster.
- Bei Uwe sind Eisblumen im Fenster.
- Das grüne Paket steht—wenn man vor dem Schlitten steht—unmittelbar rechts neben dem weißen.

- Die Schokokugeln hängen an dem Paket mit der Eisenbahn.
- Die Lakritze hängt an dem gelben Paket.
- Das Paket, das in der Mitte steht, bekommt das Kind mit dem Engelchen im Fenster.
- Das Geschenk für Norbert steht ganz links.
- Die Karamelbonbons hängen an dem Paket, das neben dem mit den Büchern von Karl May steht.
- Die Lakritze hängt an dem Paket, das neben dem mit dem Skateboard steht.
- Die Gummibärchen bekommt das Kind mit der Krippe im Fenster.
- Jens bekommt das Paket mit den Zuckerstäbchen.
- Norberts Geschenk steht neben dem blauen Paket.

Welches Kind hat einen Stern im Fenster? Wer bekommt das Feuerwehrauto?

Frohe Weihnachten und Alles Gute für 2006!