Übungsbeispiele “Logik” W05
Blatt 3

Prof. Helmut Veith
Dipl.-Ing. Christian Schallhart
Dr. Stefan Katzenbeisser

1 N, Z und Q

Betrachten Sie die Strukturen $N = (\mathbb{N}, +, \times, 0, 1)$, $Z = (\mathbb{Z}, +, \times, 0, 1)$ und $Q = (\mathbb{Q}, +, \times, 0, 1)$.

1. Geben Sie Sätze an, die zeigen, dass N, Z und Q nicht elementar äquivalent sind.
2. Zeigen Sie, dass N und Z keine Quantorenelimination haben.
   Hinweis: Im Unterschied zur Presburger Arithmetik gibt es hier keine Prädikate für die Teilbarkeit.

2 Gruppenaxiome

Beschreiben Sie die Axiome der kommutativen Gruppen in Prädikatenlogik mit einer geeigneten Signatur. Gibt es einen Satz, der in manchen kommutativen Gruppen wahr ist und in anderen falsch? Schliessen Sie daraus, ob die Theorie der kommutativen Gruppen vollständig ist.

3 Dichte lineare Ordnung

Zeigen Sie, dass die Struktur $(A, \leq^A)$, wobei $A = \{\frac{k}{2^n} : k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ und $\leq^A$ die natürliche Ordnung ist, ein Modell der Axiome der dichten linearen Ordnung ohne Endpunkte ist.

4 Quantorenelimination

Zeigen Sie, dass die dichte lineare Ordnung $\leq$ auf dem rationalen Intervall $[0, 1]$ Quantorenelimination hat. Verwenden Sie dazu die Signatur $(\leq, 0, 1)$, wobei 0 und 1 die Konstanten für die Endpunkte sind. Zeigen Sie, dass ohne die Konstanten $0, 1$ keine Quantorenelimination möglich ist.

5 Extensionsaxiome *

Betrachten Sie die folgenden einfachen Extensionsaxiome für Graphen:
$\phi_k :=$ “Wenn W und W' zwei disjunkte Mengen von Knoten sind mit Kardinalität $\leq k$, dann gibt es einen Knoten x, der mit allen Knoten in W verbunden ist, aber mit keinem Knoten in W'.”

1. Beschreiben Sie ϕ_k in Prädikatenlogik.
2. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mu_{n,k}$ von ϕ_k auf einem zufällig gewählten Graphen mit n Knoten ab.
3. Zeigen Sie mit Hilfe von 2., dass $\lim_{n\to\infty} \mu_{n,k} = 1$ ist.

6 Geometrie

Beschreiben Sie die folgenden Probleme mit der Signatur $(\mathbb{R}, +, -, \times, 0, 1)$ der reell abgeschlossenen Körper. Verwenden Sie dabei “Makros”, d.h. Abkürzungen, die Sie beim Aufbau komplexerer Formeln wiederverwenden.

1. In einen Kreis mit Radius 7 können 3 Kreise mit Radius 2 so eingeschrieben werden, dass die Kreise einander nicht schneiden.
2. Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ die variablen Koordinaten dreier Punkte im 2-dimensionalen Raum. Geben Sie Formeln an, die sagen, dass
   - alle drei Punkte auf einer Linie liegen.
   - das aufgespannte Dreieck rechtwinklig ist.
   - die Fläche des aufgespannten (nicht notwendigerweise rechtwinkligen) Dreiecks $\geq c$ (c eine rationale Konstante) ist.

7 Kompaktheitssatz

Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes: Wenn eine Theorie beliebig grosse endliche Modelle hat, dann besitzt sie auch ein unendliches Modell.