Technische Universität München
Institut für Informatik
PD Dr. Markus Holzer
Dipl. Inf. (Univ.) Stefan Kugele

SS 2007
Übungsblatt 1
Donnerstag, 26. April 2007

Übung zur Vorlesung Komplexitätstheorie

Hinweis: Die Zentralübung zur Vorlesung "Komplexitätstheorie" findet jeden

Donnerstag zwischen 14:15 und 16:45 Uhr im Raum 03.09.014

statt. Die Übungsblätter werden jeweils in der Zentralübung am Donnerstag ausgegeben und in den Übungsstunde der darauffolgenden Wochen besprochen. Nicht jede Woche wird es ein eigenes Übungsblatt geben, damit in der Zentralübung genug Zeit für Fragen und Wiederholungen bleibt.

Informationen zur Vorlesung und Übung werden im WWW unter

`http://www.model.in.tum.de`

ausgehängt. Am Ende des Semesters findet je nach Teilnehmerzahl entweder eine Klausur oder eine mündliche Prüfung statt. Termin und weitere Einzelheiten werden rechtzeitig in Übung und Vorlesung bekannt gegeben. Sollten Sie weitere organisatorische Fragen oder Fragen zum Stoff der Vorlesung haben, so wenden Sie sich bitte an Herrn Holzer, Raum MI 03.11.057, Tel. 289-17230, `holzer@in.tum.de` oder Herrn Kugele, Raum MI 03.11.060, Tel. 289-17200, `kugele@in.tum.de`.

Wir wünschen Ihnen für das Sommersemester 2007 viel Erfolg.

Aufgabe 1 *O-Notation*

Zeigen Sie

(a) $o(f) \subseteq \mathcal{O}(f)$

(b) $o(f) \cap \Omega(f) = \emptyset = \mathcal{O}(f) \cap \omega(f)$

(c) $f \in \mathcal{O}(g) \Leftrightarrow g \in \Omega(f)$

(d) $f \in \Theta(g) \Leftrightarrow g \in \Theta(f) \Leftrightarrow \Theta(f) = \Theta(g)$

(e) $\mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(f + g)$

(f) $\mathcal{O}(f) \cdot \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(f \cdot g)$

Aufgabe 2 *Palindrome auf Turingmaschinen*

Die Sprache der Palindrome PALINDROM beinhaltet all jene Wörter, die vorwärts und rückwärts gelesen gleich lauten, das heißt, PALINDROM beinhaltet Wörter der Form $u_1u_2 \dots u_{n-1}u_nu_nu_{n-1} \dots u_2u_1$ und der Form $u_1u_2 \dots u_{n-1}u_nvu_nu_{n-1} \dots u_2u_1$, wobei u_i und v beliebige Zeichen aus dem zugrunde liegenden Alphabet sind.
In dieser Aufgabe werden wir die Turingmaschine nochmals wiederholen und verschiedene Varianten der Turingmaschine behandeln—Ziel ist dabei, ein Gefühl für den Formalismus der Turingmaschine zu entwickeln:

(a) Geben Sie eine Turingmaschine an, die PALINDROM entscheidet, die nur über **ein Eingabeband** verfügt, das gleichzeitig als Arbeitsband dient. Bestimmen Sie den Zeit- und Platzbedarf dieser Maschine.

(b) Geben Sie eine Turingmaschine an, die PALINDROM entscheidet, die über ein **Read-Only Eingabeband** verfügt sowie über **ein zusätzliches Arbeitsband** verfügt. Bestimmen Sie den Zeit- und Platzbedarf dieser Maschine.

(c) Geben Sie eine Turingmaschine an, die PALINDROM entscheidet, die nur über **ein Eingabeband** verfügt, das gleichzeitig als Arbeitsband dient, aber mit **zwei Arbeitsköpfen** ausgestattet ist. Bestimmen Sie den Zeit- und Platzbedarf dieser Maschine.

(d) Definieren Sie eine **Speicherstruktur Ihrer Wahl** und geben Sie dafür eine Turingmaschine an, die PALINDROM entscheidet. Analysieren Sie wieder Zeit- und Platzbedarf.

Aufgabe 3 *Klassen und Probleme*

Wiederholen Sie die Definitionen der Klassen

$$\mathbf{L} \subseteq \mathbf{NL} \subseteq \mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \subseteq \mathbf{PSPACE}.$$

Ordnen Sie nun die folgenden Probleme in dieser Hierarchie ein, indem Sie für jedes dieser Probleme einen möglichst Platz- oder Zeit-effizienten Algorithmus angeben (und damit "Membership" nachweisen).

(a) Erfüllbarkeit von booleschen Schaltkreisen—CIRCUITSAT: Eine Instanz besteht aus einem booleschen Schaltkreisen C, der aus Konstanten, Eingabe-, Und-, Oder- und Negationsgatter aufgebaut ist und in dem ein Gatter als Ausgabe markiert ist. Gegeben eine Instanz C, ist die Frage, ob es eine Belegung der Eingabegatter gibt, unter der das markierte Ausgabegatter zu TRUE evaluiert.

(b) Erreichbarkeit in Graphen—GAP: Eine Instanz besteht aus einem gerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$ und zwei Knoten $s, t \in V$. Gegeben eine Instanz $\langle G, s, t \rangle$, ist die Frage zu beantworten, ob es einen Pfad von s nach t in G gibt.

(c) Evaluierung von booleschen Schaltkreisen—CIRCUITEVAL: Eine Instanz besteht aus einem booleschen Schaltkreisen C (wie oben) und einer Belegung $\bar{x}$ der Eingabegatter. Gegeben eine Instanz $\langle C, \bar{x} \rangle$, ist die Frage, ob $C(\bar{x}) =$ TRUE gültig ist.

(d) Evaluierung von quantifizierten, booleschen Ausdrücken—QBF: Eine Instanz von QBF ist eine boolesche Formel ϕ über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ in konjunktiver Normalform. Es ist die Frage zu beantworten, ob $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots \mathcal{Q} x_n \phi$ zu TRUE oder FALSE evaluiert.

Gegen Sie zusätzlich für die oben genannten Probleme geeignete Codierungen über $\Sigma = \{0, 1\}$ an.

Aufgabe 4 *Festes Wortproblem, Chomsky und Komplexität*

Gegeben sei eine Type-k Sprache $L \subseteq \Sigma^*$. Eine Instanz des festen Wortproblems ist ein Wort $w \in \Sigma^*$ und zu beantworten ist die Frage, ob $w \in L$ ist. In welcher Klasse (aus **L**,**NL**,**P**,**NP**,**PSPACE**) lässt sich das feste Wortproblem für eine fixierte Type-k Sprache L bewältigen (in Abhängigkeit von k)?
Mit anderen Worten, in welcher Klasse können wir eine fixe reguläre, kontextfreie, monotone und uneingeschränkte Sprache entscheiden?